

最適成長型動学CGEモデルの数値解法¹⁾

－GAMSソフトウェアを用いて－

尹 清 洙

I はじめに

本稿は最適成長型動学CGE (Computable General Equilibrium) モデルについての理論的考察と実際それを解くためのGAMS (General Algebraic modeling System)プログラムを明らかにすることを目的としている。

経済学において異時点間の最適な社会的貯蓄行動に関する研究は Frank P. Ramsey(1928) から始まり、それは新古典経済学の最適経済成長研究の基礎となっている。本稿では第Ⅲ節で示すラムゼイ型最適成長モデルについて考察し、その数値解法については、Lau, Phlke and Rutherford(2002)に従い、GAMSソフトウェアを用いて非線形最適計画問題NLP (Non-linear Programming) と混合相補性問題MCP (Mixed Complementarity Problem) による二つの解決方法を提示する。

GAMSは世界銀行によって開発されたソフトウェアで、線形・非線形計画問題や非線形相補性計画問題などの代数問題を数値的に解くことができる。GAMSは数理計画問題を解くためのソルバーと呼ばれる複数²⁾のソフトウェアを制御し、統一された仕様で複雑な非線形問題を解く機能を有し

¹⁾ 本研究は2009年度長崎県立大学学長裁量研究、2007－2009年度文部科学省学術振興会若手研究B(課題番号：19730203)の一部として行われるものである。ここに記して、謝意を表したい。

²⁾ GAMS-The Solver Manuals(2007)には29種類のソルバーが紹介されている。

ているが、本稿では応用一般均衡モデルを解くための幾つかのソルバーを用いながら、応用一般均衡モデルの数値解法について考察する。

本稿の構成は以下のとおりである。

まず第II節において、GAMSを用いた応用一般均衡モデルの数値解法について考察する。具体的には応用一般均衡モデルでもっともよく使用されるMINOS, CONOPT, MILES, PATHという4種類のソルバーを取り上げ、それぞれの特徴や違いについて説明を行う。第III節ではラムゼイ型最適成長モデルについての理論的考察を行う。そして第IV節において、最適成長型動学モデルを解くための無限期間の近似問題を検討する。第V節においては、具体的なGAMSプログラムを提示する。最後に第VI節で、本稿の結論を与える。

II 応用一般均衡モデルの数値計算

現代の主流派経済学は新古典経済学であり、その特徴として厳密なミクロ基礎付けがある理論的バックグラウンドを持つ一般均衡分析的な視点が求められるようになってきている。

一般均衡分析はレオン・ワルラスによって考案され、1950年代にケネス・アロー、ジェラルド・ドブルー、ライオネル・マッケンジー、二階堂副包らの貢献により現在の統合的な分析手法となった。しかし、当時その理論モデルは抽象性が高く、一般的な結論を導くことはできるが、具体的な問題を扱う実証分析には至らなかった。その後、米国イェール大学のScarf(1967)によって不動点アルゴリズムが開発され、それを用いてShoven and Whalley(1973,1984)が一般均衡モデルへのコンピュータ数値計算を適用し始めた。

そのため、当時は一般均衡体系を連立方程式体系として捉え、その不動点を計算するという考え方に基づいて数値計算が行われた。具体的にはScarf法やMerrii, Eaves, Saigai等の区分的線形法などの不動点アルゴ

リズムが利用された。すなわち、一般均衡解の存在証明の考え方に忠実な解き方であった。しかし、計算効率が悪い欠点が存在した。

そこで、一般均衡問題を同値の非線形計画法問題に定式化し直した上で、計算効率が優れているNewton法などの反復法で解く方法が定着した。「解の存在の有無」の問題は人間だけが考えることであるが、しかし、「解が存在する」ことさえわかれば、効率的なのはやはり反復法に優れているコンピュータの性能を大いに活用するわけである。

現在、GAMSには応用一般均衡モデルの数値計算の方法として概ね二種類のパターンが存在する。

一つ目は非線形計画法問題として解く方法である。すなわち、ある制約条件の下で目的関数の最適化を図る方法である。具体的に企業はある一定の生産技術の下で利潤最大化行動、消費者はある一定の所得の下で効用最大化行動を取ると仮定される。代表的なソルバーとしてMINOSとCONOPTなどがある。

GAMS/MINOSはGAMS環境の下で非線形計画法問題を解くもっとも古いソルバーとして以下のような特徴を持っている。

1. スタンフォード大学の最適化システム研究所によって開発された最適化プログラムパッケージである。
2. 線形計画法問題に対しては、シンプレックス法を用いている。
3. 非線形問題に対しては、線形計画法の解法であるシンプレックス法を線形付き非線形計画法へ拡張した一般化縮約勾配 (Generalized Reduced Gradient Method) を用いた準ニュートン法に基づいており、問題のスパース性を利用したものである。
4. 非線形制約の取り扱いに対しては、Projected Augmented Lagrangian 乗数法を適用している。

他方、GAMS/CONOPTはMINOSなどお互いに補完的なソルバーとして以下のような特徴を持っている。

1. デンマークのARKI社によって開発された非線形問題解決のための

プログラムパッケージである。

2. 最急降下法, 準ニュートン法, 逐次線形計画法, 逐次二次計画法, 共役勾配法などのアルゴリズムを併用して非線形計画問題を解く。
3. MINOSに比べてどちらが優れているとは言えないが, 一般的に非線形制約条件が多い大規模の場合にはCONOPT, 逆の場合にはMINOSが適合であると理解される。

なお, これらのソルバーの詳細についてはGAMS社の以下のホームページを参照して頂きたい。 <http://www.gams.com/solvers/solvers.htm>。

二つ目の方法は非線形相補性問題として解く方法である。すなわち, 変数 $X = (X_1, \dots, X_n)$ と同じ次元をもつ非線形ベクトル値関数

$$F(X) = (F_1(X), \dots, F_n(X))$$

に対して,

$$X_i \geq 0, \quad F_i(X) \geq 0, \quad X_i * F_i(X) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たす $X = (X_1, \dots, X_n)$ を求める問題である。非線形相補性問題を解くアルゴリズムとしてスカーフの不動点アルゴリズムやComplementarilyアルゴリズムがよく利用される。GAMS環境の下で代表的なソルバーとしてMILESとPATHがある。

GAMS/MILESはGAMS環境の下でMCPを解くソルバーとして以下のような特徴を持っている。

1. コロラド大学のT.F. Rutherford教授によって開発されたものである。
2. 非線形相補性問題及び非線形方程式体系を解くためのFortran言語プログラムである。
3. 解法プロシージャは反復作業を伴うニュートン法に基づいている。
4. 応用一般均衡モデルによく利用されるMPSGE (Mathematical Programming System for General Equilibrium analysis) プログラムは最終的にMCP問題としてコンパイルされる。

GAMS/PATHはGAMS環境の下でMCP問題を解くソルバーとして以下

のような特徴を持っている。

1. 線形問題はMILESと同じくレムケのアルゴリズムを用いている。
2. 非線形問題の解法プロシージャはMathiesen(1987)のSLCP(the sequence of linear complementarity problems method)法に基づいており、MILESよりもっと効率で強力的な解法を与えている。Mathiesenのアイデアは、ニュートン法の長所と不動点法の長所を組み合わせたものである。具体的には計算の初期段階には不動点法や線形計画法に似た方法で生産技術や不等式制約を見つけ出し、その後ニュートン法で解を見つけ出す。ニュートン法で非線形問題を解く場合には、解の近いところから探し始めたら収束しやすいが、遠い場合にはなかなか収束しにくい問題点が存在する。PATHには解を近いところから探させる工夫がなされている。

Ⅲ ラムゼイ型最適成長モデル

まず、次のようなラムゼイ型最適成長モデルについて考える。

$$\begin{aligned}
 \max_{c_t} U &= \max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t U(C_t) \\
 Y_t &= f(K_t, L_t) \\
 I_t &= Y_t - C_t \\
 K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t, \quad K_0 = \overline{K_0}, \quad I_t \geq 0 \\
 L_t &= (1+ng)^t L_0
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、 U は効用関数、 C_t は消費、 Y_t は所得、 K_t は資本ストック、 L_t は効率単位の労働力人口、 I_t は投資、 $\rho > 0$ は割引率、 δ は資本減耗率、 ng は労働力の増加率である。すなわち、家計が将来にわたっての消費から得られる効用の割引現在価値を最大化するために、どれだけ消費し、どれだけ貯蓄（または投資）するかの問題である。

Lau, Phlke and Rutherford(2002)では、上記のラムゼイモデルに対して、非線形最適計画法、KKT問題、相補性問題、双対問題という四つの解法を提示している。

ここでは、そのうち最も一般的な方法である非線形最適計画法 (NLP) と最近その合理性が非常に注目されている相補性問題(MCP)を取り上げ、最適成長型動学CGEモデルの解法について考察する。

さて、上記のモデルを解くと以下の (2) のような必要条件が得られる。

$$\begin{aligned}
 P_t &= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t \frac{\partial U(C_t)}{\partial C_t} \\
 PK_t &= (1-\delta)PK_{t+1} + P_t \frac{\partial f(K_t, L_t)}{\partial K_t} \\
 PK_t &= P_t
 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、 P_t と PK_t はラグランジュ乗数であるが、前者は一般物価水準、後者は資本の限界生産力の現在割引価値であると考えることができる。

非線形計画問題の最適性条件であるKarush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件が均衡問題の形で表わされることから、Mathiesen(1985)は一般均衡モデルがゼロ利潤条件、市場均衡条件と所得定義式の3種類の方程式によって記述される問題であることに注目し、相補性問題として取り扱うことを提案している。

すなわち、いま、 $P_t \left(\frac{\partial f(K_t, L_t)}{\partial K_t}\right) = RK_t$ を資本サービスコスト、 W_t を賃金、 $C(RK_t, W_t)$ を Y_t を1単位生産するために必要となる単位費用とすれば、動学モデルの必要条件は次の (3) のような相補性問題として表現することができる。

ゼロ利潤条件

$$P_t \geq PK_t \perp I_t \geq 0$$

$$PK_t \geq (1-\delta)PK_{t+1} + RK_t \perp K_t \geq 0$$

$$C(RK_t, W_t) \geq P_t \perp Y_t \geq 0$$

需給均衡条件

$$Y_t \geq C_t + I_t \perp P_t \geq 0$$

$$K_t \geq Y_t \frac{\partial C(RK_t, W_t)}{\partial RK_t} \perp RK_t \geq 0$$

$$L_t \geq Y_t \frac{\partial C(RK_t, W_t)}{\partial W_t} \perp W_t \geq 0$$

所得定義式

$$M_t = PK_0 \bar{K}_0 + \sum_{t=0}^{\infty} W_t \bar{L}_t$$

(3)

IV 無限期間の近似問題

上記のラムゼイモデルは無限期間モデルであるが³、コンピュータ上での数値計算は有限期間しかできないので、有限期間への近似、すなわち、終端条件の設定問題が存在する。

Barr and Manne (1967) はFrisch (1957) のアイデアから、非線形計画問題としての無限期間の近似方法を提案した。すなわち、定常均衡状態の t 期において、

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} \frac{L_{t+1}}{L_t} = \frac{I_t}{L_t} + (1-\delta) \frac{K_t}{L_t} \quad \text{は}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K_t}{L_t} = \kappa^*$$

であれば,

$$\dot{\kappa}^* = (ng + \delta) \kappa^*$$

となる。 n が十分大きければ、 $t \geq n$ において、次のような定常均衡条件が成り立つ。

$$I_t = (ng + \delta)K_t$$

この条件を用いて、最適成長モデルの数値解法を行うのが伝統的な方法であったが、このアプローチの制約は、経済がいつ定常になるかどうかを決定する良い方法はないことを意味する。

他方、Lau, Phlke and Rutherford(2002)では、このような終端における定常均衡条件を仮定しない新しい方法であるMCP形式を提案した。そこでは、無限期間問題を0期から n 期、 $n+1$ 期から無限期間の二つの期間に分けて、最適化問題を考える。

$$\max \sum_{t=0}^n \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t U(C_t)$$

$$\text{但し, } \sum_{t=0}^n p_t C_t = \sum_{t=0}^n W_t L_t + p_0^k K_0 - p_{n+1}^k K_{n+1} \quad ,$$

$$\max \sum_{t=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t U(C_t)$$

$$\text{但し, } \sum_{t=n+1}^{\infty} p_t C_t = \sum_{t=n+1}^{\infty} W_t L_t + p_{n+1}^k K_{n+1}$$

この最適化問題において、終端における資本ストックは内生変数であり、この動学モデルを解くためにLau, Phlke and Rutherford(2002)は、 n を終端時点とすると、次の条件を課すことを提案している。

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{Y_n}{Y_{n-1}}$$

すなわち、終端時点における投資の増加率と成長率が一致するという条件である。この条件式は終端時点における特定の成長率を保証するもので

も、特定の資本ストックの水準を指定するものでもなく、有限期間で解いても、より長い期間、或いは無限期間で解いた解と一致させることができる。

V GAMSプログラミング

GAMSを用いて応用一般均衡モデルを構築する方法については、細江他(2004)が詳しいが、NLPに限られている。また応用一般均衡モデルを構築するためにRutheford(1999)によって開発されたGAMS/MPSGEは、アロー・デブリュー型一般均衡モデルを(1)ゼロ利潤条件、(2)需給均衡条件、(3)所得定義式の三条件に簡潔に記述し、それを複雑なMCP方程式体系に自動生成する便利な機能を有している。GAMS/MPSGEについては小平(2003)、伴(2003)、伴(2007)等が詳しい。

ここでは、三節で示した非線形最適計画問題(NLP)と相補性問題(MCP)の二つの方法についてのGAMSプログラムを提示する。

まず、以下のようなシンプルな社会会計表を仮定し、それに基づいて具体的なプログラムを提示する。

表1：An example SAM data at the benchmark period

	Output	Household	Investment	Total
Goods		7.6	2.4	10.0
Household	10.0			10.0
Capital		2.4		2.4
Total	10.0	10.0	2.4	

(出所：伴(2003)より。)

すなわち、初期状態における諸パラメータは以下のとおりである。

I0	Base Year investment	2.40
ng	Labor force growth rate	0.02
rho	Time preference	0.05

delta	Depreciation rate	0.10
K0	Base Year capital	20.00
L0	Base Year labor	7.00
Y0	Base year output	10.00
beta	Capital share	=3.0/10.0=0.30

このデータベースに基づいて、まず次のようなNLPプログラムを提示する。

1. \$TITLE Ramsey Model : NLP

\$if not setglobal horizon \$setglobal horizon 20

SET T/I *% horizon/
SET TFIRST(T), TLAST(T);
 TFIRST(T) =YES \$(ORD(T) EQ 1);
 TLAST (T) =YES \$(ORD(T) EQ CARD(T));

SCALAR

Ng Labor Growth rate /0.02/
 Rho Time Preference /0.05/
 DELTA Depreciation rate /0.10/
 K0 Base Year capital /20.00/
 L0 Base Year labor /7.00/
 Y0 Base year output /10.00/
 Beta Capital share /0.30/
 a0 Technology factor;

PARAMETER

L(T) Labor force,
 PREF(T) Reference price path;
 a0 = y0/(k0**beta*L0**(1-beta));
 L(T) = L0*(1+ng)**(ORD(T)-1);

PREF(T) = (1/(1+rho))**(ORD(T)-1);
 PREF(TLAST) = PREF(TLAST)/(1-(1+ng)/(1+rho));

POSITIVE VARIABLES

Y(T) Output,
 K(T) Capital stock,
 C(T) Consumption,
 I(T) Investment;

VARIABLES

UTIL Utility function;

EQUATION

eq_Y(T) Output,
 eq_C(T) Capacity constraint,
 eq_K(T) Capital balance,
 eq_TK(T) Terminal condition(provides for post-terminal growth),
 eq_UTIL Discounted log of consumption: objective function;
 eq_Y(T).. Y(T) =e= C(T) + I(T);
 eq_C(T).. $a_0 * K(T)^{\beta} * L(T)^{1-\beta} =e= Y(T)$;
 eq_K(T+1).. $K(T+1) =e= (1-DELTA) * K(T) + I(T)$;
eq_TK(TLAST).. $I(TLAST) =g= (ng + DELTA) * K(TLAST)$;
 eq_UTIL.. UTIL =E= sum(T,pref(T)*L(T)*log(C(T)/L(T)));

MODEL Ramsey /eq_Y, eq_C, eq_K, eq_TK, eq_UTIL/;

SOLVE Ramsey maximizing UTIL USING NLP;

ここでは、NLPでラムゼイモデルを記述しているが³、注目すべきところは、方程式eq_TK(TLAST)である。すなわち、終端において、次のような定常均衡条件を仮定している。

$$I_t = (ng + \delta)K_t$$

定常均衡における資本ストックの成長率に関する条件である。ここで、

n が十分大きければ、定常均衡を仮定しても解は終端条件の影響をあまり受けないが、実際ここでは20年間でモデルを解いている。

このプログラムをGAMSで実行すると、膨大な出力が出てくるが、以下のようなSOLVE SUMMARYがもっとも大事である。

S O L V E		S U M M A R Y	
MODEL	Ramsey	OBJECTIVE	UTIL
TYPE	NLP	DIRECTION	MAXIMIZE
SOLVER	CONOPT	FROM LINE	56
****SOLVER STATUS		1	NORMAL COMPLETION
****MODEL STATUS		2	LOCALLY OPTIMAL
****OBJECTIVE VALUE		20.1483	

MODEL STATUSが解の状態を示しているが、ここでは最適解（局所）が得られていることを意味する。もし、「Infeasible solution」、 「Unbounded solution」などが表示されれば、解がうまく解けていないことを意味する。得られた最適消費量は以下の表2のとおりである。

表2：最適消費量（NLP）

期	消費量	期	消費量	期	消費量	期	消費量
1	7.600	6	8.391	11	9.264	16	10.228
2	7.752	7	8.559	12	9.450	17	10.433
3	7.907	8	8.730	13	9.639	18	10.642
4	8.065	9	8.905	14	9.832	19	10.855
5	8.227	10	9.083	15	10.028	20	11.072

(出所：筆者が作成。)

次に示すMPSGEプログラムは特に終端における資本ストックの条件を設けなくても、モデルが解ける利点がある。

2. \$TITLE Ramsey Model : Barr-Manne MPSGE

\$INCLUDE DATA

\$setglobal termcnd MCP

SCALAR NLPTERM/0/,MCPTERM/0/;

% termcnd% term = 1;

\$ONTEXT

\$MODEL:RAMSEY

\$SECTORS:

Y (T)	!	Output
I (T)	!	Investment
K (T)	!	Capital stock

\$COMMODITIES:

P (T)	!	Output Price
RK (T)	!	Return to capital
PK (T)	!	Capital price
PL (T)	!	Wage rate
PKT	!	Terminal capital

\$CONSUMERS:

RA	!	Representative agent
----	---	----------------------

\$AUXILIARY:

TK	!	Post-terminal capital stock
----	---	-----------------------------

\$PROD: Y(T) s:1

O: P (T)	Q: Y0
I: PL (T)	Q: L0
I: RK (T)	Q: K0 P: (DELTA + rho)

\$PROD: K(T)

O: PK (T + 1)	Q: (1 - DELTA)
O: PKT \$TLAST (T)	Q: (1 - DELTA)

```

O: RK (T)                Q: 1
I: PK (T)                Q: 1
$PROD: I(T)
O: PK (T + 1)           Q: 1
O: PKT $TLAST (T)      Q: 1
I: P (T)                Q: 1
$DEMAND: RA S: 1
D: P (T)                Q: (L(T)/L(0))*C(0)  P: PREF(T)
E: PL (T)               Q: L(T)
E: PK (TFIRST)         Q: K0
E: PKT                  Q: -1                R: TK
$CONSTRAINT: TK
SUM (T $TLAST (T+1), I(T+1)/I(T)-Y(T+1)/Y(T) =E=0;
$OFFTEXT
$SYSINCLUDE mpsgeset RAMSEY
RAMSEY.ITERLIM = 100;
$INCLUDE RAMSEY.GEN
SOLVE RAMSEY USING MCP;

```

ここでは、MCPでラムゼイモデルを解いているが³、注目すべきところは、\$CONSTRAINT: TK条件である。すなわち、終端において、次のような条件を仮定している。

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{Y_n}{Y_{n-1}}$$

この条件式は終端時点における特定の成長率を指定するものではなく、ただ、有限期間で解いても、より長い期間で解いた解と一致させることができるものである。

このプログラムをGAMSで実行して得られたSOLVE SUMMARYは以

下のとおりである。

S O L V E		S U M M A R Y	
MODEL		Ramsey	
TYPE		MCP	
SOLVER		MILES	FROM LINE 98
****SOLVER STATUS		1 NORMAL	COMPLETION
****MODEL STATUS		1 OPTIMAL	
RESOURCE USAGE, LIMIT		0.008	1000.000
ITERATION COUNT, LIMIT		0	0
EVALUATION ERRORS		0	0
MILES (December1994)		ver:225-wat-13	

MODEL STATUSを見ると、ここでも最適解が得られていることがわかる。得られた最適消費量は以下の表3のとおりである。

表3：最適消費量 (MCP)

期	消費量	期	消費量	期	消費量	期	消費量
1	7.600	6	8.391	11	9.264	16	10.229
2	7.752	7	8.559	12	9.450	17	10.433
3	7.907	8	8.730	13	9.639	18	10.642
4	8.065	9	8.905	14	9.831	19	10.855
5	8.226	10	9.083	15	10.028	20	11.072

(出所：筆者が作成。)

表2と3を比較すると、ほぼ同じ計算結果となっていることがわかる。

V おわりに

現代において動学的最適化問題³⁾を扱うには変分法、最適制御理論と動的計画法の3つの主要なアプローチがある。本稿では最適制御理論に焦点を当てて、その解法について考察した。

最適制御理論では、目的関数における時間 t を特殊なものと考えず、単なる外生変数と考える。つまり、 $x_0, \dots, x_{T-1}(k_0, \dots, k_t)$ を同じ $x(k)$ の時間的変化とみず、それぞれ独立の変数と見る。そして遷移式も環境制約式もすべて制約式と考える。そして目的関数を巨大な静学問題と考えて、非線形最適計画問題の考え方を適用するのである。

非線形計画問題の最適性条件であるKarush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件が均衡問題の形で表わされることから、Mathiesen(1985)は一般均衡モデルを混合相補性問題 (MCP) として取り扱うことを提案している。このようなMCPフォーマットによって、一般均衡問題を①ゼロ利潤条件②市場清算条件③所得定義式の3つの条件に表現することができた。しかし、実際の数値計算においては膨大な方程式を記述しなければならず、大変煩雑である。それを改善したのが、Rutherford (1999) のMPSCGEの簡潔なプログラムであり、大規模のMCP方程式体系を自動生成するメカニズムを持っている。

本稿では非線形最適計画問題NLPと混合相補性問題MCPによる動学的最適化の数値計算方法を提示したが、両方の計算結果はほぼ同じであった。しかし、Lau, Phlke and Rutherford(2002)においては、MCPの方の優越性を論じている。その理由としては、終端条件における諸仮定などが挙げられている。例えば、NLPにおいては終端の定常均衡における資本ストックの成長率などを仮定しなければ動学モデルは解けない。それに対してMCPにおいては、そのような必要がないため、特に内生的最適成長モ

³⁾ 動学的最適化問題については、A.C.チャン(2007)や西村(1995)、非線形最適化問題については、福島(2001)などがわかりやすい。

デルの数値計算に適していると論じている。

また、数値解法の効率性から見ても、MCPのソルバーのひとつであるPATHには優れたSLCPアルゴリズムが内蔵されていて、解が存在するにもかかわらずモデルが解けないリスクを大幅に軽減することができ、大規模で複雑な一般均衡モデルの解法に適していると思われる。

そのため、今後の課題である「東アジアリンクCGEモデル（尹[2006]）」の動学化に向けてはMPSGEプログラムを用いて、拡張作業に臨みたい。

参考文献

- 尹清洙(2006)「北東アジア国際連結CGEモデルの構造とシミュレーション」『産業連関』第14巻3号, 22-32頁。
- 小平裕(2003)「MathematicaとMPSGEによる応用一般均衡分析」『成城大学経済研究』第161号, 69-112頁。
- 西村清彦(1990)『経済学のための最適化理論入門』, 東京大学出版会。
- 伴金美(2003)<http://ban.econ.osaka-u.ac.jp/kban/>(2003年度大学院授業ノート)。
- 伴金美(2007)「日本経済の多地域動学的応用一般均衡モデルの開発 –Forward Lookingの視点に基づく地域経済分析 –」RIETI Discussion Paper Series 07-J-043.
- 細江宣裕・我澤賢之・橋本日出男(2004)『テキストブック応用一般均衡モデリング』, 東京大学出版会。
- 福島雅夫(2004)『非線形最適化の基礎』, 朝倉書店。
- A.C.チャン著(1992)小田正雄・仙波憲一・高森寛・平澤典男訳(2007)『動学的最適化の基礎』, シーエービー出版。
- Barr, J.R., Manne, A.S., (1967), “Numerical experiments with finite horizon planning models,” *Indian Economic Review* 2, pp.1-29.
- Frisch, R., (1957), *Oslo decision models*, Mimeographed paper, University Institute of Economics, Oslo.
- Lau, M.I., A. Pahlke and T.F. Rutherford, (2002), “Approximating Infinite-Horizon Models in a Complementarity Format: A Primer in Dynamic

- General Equilibrium Analysis,” *Journal of Economic Dynamics & Control* 26, pp.577-609.
- Mathiesen, L., (1985), *Computation of Economic Equilibrium by a Sequence of Linear Complementarity Problem*, North-Holland, Amsterdam.
- Mathiesen, L., (1987), “An algorithm based on a sequence of linear complementarity problem applied to Walrasian equilibrium: An example,” *Mathematical Programming Study*, 37, pp.1-18.
- Ramsey, F.P., (1928), “A Mathematical Theory of Saving,” *The Economic Journal* 38, pp.543-559.
- Rutherford, T.F., (1999), “Applied General Equilibrium Modeling with MPSGE as a GAMS Subsystem: an Overview of the Modeling Framework and Syntax,” *Computational Economics* 14, pp.1-46.
- Scarf, H.E., (1967), “The approximation of fixed points of a continuous mappings,” *SIAM journal of Applied Mathematics*, 15 (5): pp.1328-1342.
- Shoven, J.B., J. Whalley, (1973), “General equilibrium with taxes: A computational procedure and an existence proof,” *Review of Economic Studies*, 40 (4): pp.475-489.
- Shoven, J.B., J. Whalley, (1984), “Applied General-Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey,” *Journal of Economic Literature*, Vol.22, pp.1007-1051.